三角関数･指数関数･対数関数　学習用プリント＜追加＞①

2026.04.15　　印刷授業担当　三國　文彦

これまでのレポートのチェックや試験の採点を通して、授業担当者の私が、多くの受講生が苦手としているのでは、または、よく理解できていないのではと感じた問題について、その考え方や解法を、少しだけ詳しく説明したいと思います。とりあえず＜追加＞①としますが、必要な場合は＜追加＞②, ③･･･もあるかも知れません。

受講生の皆さんの、これからの学習の一助になれば幸いです。

問 1　$a>0$ かつ $a\neq 0$ のとき, $p=\log_a 2$, $q=\log_a 3$, $r=\log_a 5$ とする。このとき, 次の等式を満たす mをp, q, rで表しなさい。ただし, p, q, rをすべて使うとは限らない。

$$\left(\sqrt[3]{10}\right)^{\log_2 5}=\left(\sqrt{15}\right)^m$$

＜解法1＞ ※ 対数の定義を利用する

対数の定義「 $M=a^x \ \Leftrightarrow\ x=\log_a M$ 」より

$$m=\log_{\sqrt{15}}\left(\sqrt[3]{10}\right)^{\log_2 5}=\log_2 5\times\log_{\sqrt{15}}\sqrt[3]{10}=\frac{\log_a 5}{\log_a 2}\times\frac{\log_a\sqrt[3]{10}}{\log_a\sqrt{15}}=\frac{r}{p}\times\frac{\log_a(2\times 5)^{\frac{1}{3}}}{\log_a(3\times 5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{r}{p}\times\frac{\frac{1}{3}(\log_a 2+\log_a 5)}{\frac{1}{2}(\log_a 3+\log_a 5)}=\frac{r}{p}\times\frac{2(p+r)}{3(q+r)}=\boldsymbol{\frac{2r(p+r)}{3p(q+r)}}$$

＜解法 2＞ ※ a を底とする両辺の対数をとる

a を底とする両辺の対数をとると

$$\log_a\left(\sqrt[3]{10}\right)^{\log_2 5}=\log_a\left(\sqrt{15}\right)^m\Leftrightarrow\log_2 5\times\log_a(2\times 5)^{\frac{1}{3}}=m\log_a(3\times 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\log_a 5}{\log_a 2}\times\frac{1}{3}(\log_a 2+\log_a 5)=\frac{m}{2}(\log_a 3+\log_a 5)\ \Leftrightarrow\ \frac{r}{3p}(p+r)=\frac{m}{2}(q+r)$$

よって,　$m=\frac{r}{3p}(p+r)\times\frac{2}{(q+r)}=\boldsymbol{\frac{2r(p+r)}{3p(q+r)}}$

問 2 $\cos 2\theta = -\frac{5}{13}, \sin 2\theta = \frac{12}{13}$ のとき, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい。

＜解法＞

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ より

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{13}} = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{9}{13}} = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

ここで　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{13} > 0$ であるから, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は同符号になる。

よって

Ans. $\begin{cases} \boldsymbol{\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}} \\ \boldsymbol{\sin\theta = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}} \end{cases}$ （複号同順）

※ 複号同順 ⇒ $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の正負は、その数値の前についている符号の上下の順である, つまり

① $\begin{cases} \boldsymbol{\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}} \\ \boldsymbol{\sin\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}} \end{cases}$ または ② $\begin{cases} \boldsymbol{\cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}} \\ \boldsymbol{\sin\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}} \end{cases}$ ということである。

※ このように答えを書いても良い。

［補足］ $\cos 2\theta = -\frac{5}{13}, \sin 2\theta = \frac{12}{13}$ であるから, 2θ は第2象限の角である。しかし, 何回転して第2象限にあるかは分からないので, 2θ を一般角で表さなければならない。つまり

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < 2\theta < \pi + 2n\pi$ （$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$） ∴ $\frac{\pi}{4} + n\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + n\pi$ ☚ 2 で割った

1） $n = 0$ のとき $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ となり, これは第1象限の角であるから, 答えは ① となる。

2） $n = 1$ のとき $\frac{\pi}{4} + \pi < \theta < \frac{\pi}{2} + \pi$ 　つまり $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ となり, これは第3象限の角であるから, 答えは ② となる。

⇒ n が2以上の場合やマイナスの場合も、答えは ① か ② のどちらかになります。

自分で確かめてみてください。